数理解析研究所講究録
556巻 1985年 17-36

垂直型3層チャネル配線アルゴリズムについて

九工大情報工学科　永松正博　(Masahiro Nagamatsu)

1．まえがき

ＬＳＩのマスクパターンのレイアウト設計における配線手法のうち、チャネル割当法[1] (channel assignment method) と呼ばれる手法は、配線を大域的配線(global routing)とチャネル配線(channel routing) の二段階に分けて行うものである。大域的配線では、大まかに各配線がどのチャネル（配線のための通路）を通るかを決定し、チャネル配線では、各チャネル内の配線の詳細を決定する。チャネル配線においては、要求される配線を最も少ないトラック数（チャネル幅）で実現しなければならない。このチャネル配線問題には、付加される条件等によりいくつかの型があるが、多くがＮＰ完全であることが知られている[2]。

チャネル配線の手法は、トラック、もしくは、ネットごとに配線を行うもの[1][3][4]と、コラムごとに配線を行うもの[5][6]の二種類がある。前者を水平型、後者を垂直型と呼ぶことにする。チャネル配線問題を困難なものにしているのは、各ネットの端子の位置関係により生じるネット間の制約条件であり、この制約条件を解消し、かつ、使用するトラック数を減少させるには、幹線（各ネットの配線の水平線分）を分割しなければならない。垂直型の手法は、水平型の手法に比べ、この幹線分割が自然に行われるという長所を持つ。

３層チャネル配線問題に関しては、すべてのネットが上側端子１個と下側端子１個からなる２端子ネットである任意のチャネルを、チャネル密度に等しい本数のトラックで配線するアルゴリズムが知られている[7]。このアルゴリズムは、ネットの個数をＮとす

ると、配線にO（N^2）の時間を要する。本論文では、すべてのネットが２端子ネットである任意のチャネルを、チャネル密度に等しい本数のトラックで配線する垂直型３層チャネル配線アルゴリズムを示す。このアルゴリズムはO（$N \cdot \log_2 N$）の時間で配線を行う。また、このアルゴリズムは３端子以上のネットがあるようなチャネルに対しても適用することができ、任意のチャネルを２×（チャネル密度）－１本のトラックで配線する。またこれより、２層チャネル配線問題において、任意のチャネルが４×（チャネル密度）－３本のトラックで配線可能であることを示すことができる。

２．定義と準備

２．１　チャネル

チャネルは、無向グラフ　$G=(V, E)$ で表わされる。ここで

$V = V_0 \cup V_1 \cup V_2$

$V_0 = \{\langle c, 0, 1\rangle \mid 1 \leqslant c \leqslant L\}$

$V_1 = \{\langle c, t, p\rangle \mid 1 \leqslant c \leqslant L,\ 1 \leqslant t \leqslant W,\ 1 \leqslant p \leqslant Z\}$

$V_2 = \{\langle c, W+1, 1\rangle \mid 1 \leqslant c \leqslant L\}$

$E = E_0 \cup E_1 \cup E_2$

$E_0 = \{(\langle c, 0, 1\rangle, \langle c, 1, p\rangle) \mid 1 \leqslant c \leqslant L,\ 1 \leqslant p \leqslant Z\}$

$E_1 = \{(\langle c, t, p\rangle, \langle c+1, t, p\rangle) \mid 1 \leqslant c \leqslant L-1,\ 1 \leqslant t \leqslant W, 1 \leqslant p \leqslant Z\}$

$\quad \cup \{(\langle c, t, p\rangle, (c, t+1, p\rangle) \mid 1 \leqslant c \leqslant L,\ 1 \leqslant t \leqslant W-1,\ 1 \leqslant p \leqslant Z\}$

$\quad \cup \{(\langle c, t, p\rangle, \langle c, t, p+1\rangle) \mid 1 \leqslant c \leqslant L,\ 1 \leqslant t \leqslant W,\ 1 \leqslant p \leqslant Z-1\}$

$E_2 = \{(\langle c, W+1, 1\rangle, \langle c, W, p\rangle) \mid 1 \leqslant c \leqslant L,\ 1 \leqslant p \leqslant Z\}$

である。ただし、c, t, p, は整数値を取る。

Ｌ，Ｗ，Ｚは、それぞれ、チャネルの長さ、幅、層の個数と呼ばれる。頂点$\langle c, t, p\rangle$は、３次元空間上の、 x座標がc 、 y座標がt 、 z座標がp の位置に置かれているとする。ただし、E_0, E_2 に属する辺は y軸に平行であると見なす。z=p である平面を層p 、 x=c である平面をコラムc 、y=t である平面をトラックt と、それぞれ、呼ぶ。チャネルの幅Wを、トラック数とも呼ぶ。（図１）

２．２　ネット

V_0 に属する頂点を下側端子、V_2 に属する頂点を上側端子と呼ぶ。コラムc の上側端子をtop(c)、下側端子をbot(c)で表わす。互いに連結される端子の集合をネットと呼び、 n個の端子からなるネットを n端子ネットと呼ぶ。ネットに1,2,...,Nと番号を付け、各端子がどのネットに属するかを関数net:$V_0 \cup V_2 \rightarrow \{0,1,...,N\}$ で表わす。net(v)=0のときは、端子v はどのネットにも属さない。このような端子を空端子と呼ぶ。$1 \leqslant e \leqslant N$なる各e に対して、$|\{v|net(v)=e\}| \geqslant 2$であると仮定する。上側端子と下側端子が共に空端子でないコラムを２端子コラム、どちらか一方のみが空端子であるコラムを１端子コラム、共に空端子であるコラムを０端子コラムと呼ぶ。

colr(e) で、ネットe に属する端子の x座標の最大値を、coll(e) で最小値を表わす。各e に対して、coll(e)<colr(e) であると仮定する。$\{colr(e)|1 \leqslant e \leqslant N\}$ の最大値をL1 とする。チャネル配線においては、一般に、配線のための領域がL1 よりもさらに右側に出る。この出る長さは最大で [N/2] であるが、通常、種々の発見的な手法で小さくできる(6)。本論文では、L1 +[N/2]≦Lであると仮定する。

関数 stav:$V_0 \cup V_2 \rightarrow \{n,l,b,r\}$ を次のように定義する。

$$stav(v)=\begin{cases} n & net(v)=0\text{の場合} \\ l & net(v)\neq 0,\ (v\text{の x座標})=colr(net(v))\text{の場合} \\ b & net(v)\neq 0,\ coll(net(v))<(v\text{の x座標})<colr(net(v))\text{の場合} \\ r & net(v)\neq 0,\ (v\text{の x座標})=coll(net(v))\text{の場合} \end{cases}$$

l,r,b は、それぞれ、端子から配線が、左、右、左右に延びることを意味する。 コラムc に対して、stac(c)=(stav(bot(c)),stav(top(c))と定義する。図１に示すチャネルの場合、stac(1)=(r,r),stac(2)=(r,l),stac(3)=(b,n),stac(4)=(l,l) である。

実数値x に対して、$d(x)=|\{e|coll(e) \leqslant x \leqslant colr(e)\}|$と定義する。コラムc に対して、

d(c)をコラムc の密度、d(c+0.5)をコラムc とコラムc+1 の間の密度と呼ぶ。max{d(c)|c=1,2,...,L} をCチャネル密度と呼び、dcと書く。max{d(c+0.5)|c=1,2,..., L-1}をSチャネル密度と呼び、dsと書く。 図1に示すチャネルの場合、d(1)=2,d(1.5)=2,d(2)=3,d(2.5)=2,..... であり、dc=3,ds=2 である。単にチャネル密度という場合はSチャネル密度を意味する。

[補題1] ds≤dc≤ds+1である。また、d(c)=ds+1 であるならば、stac(c)=(l,r) か (r,l)である。 ■

2.3 チャネル配線

チャネル配線とは、次の条件1を満足するように、関数net の定義域を$V_0 \cup V_1$ からV∪Eに拡張することである。

[条件1] 1≤e≤Nなる各e に対して、V_e={v|v∈V,net(v)=e}, E_e={a|a∈E,net(a)=e}, G_e=(V_e, E_e)と定義する。次の①および②が成立する。

① 各e に対して、G_e はGの連結な部分グラフである。

② 各e,f (e≠f) に対して、$V_e \cap V_f$ =φである。また、チャネルを z軸方向に透視した場合、G_e の辺とG_f の辺が重なることはない。 ■

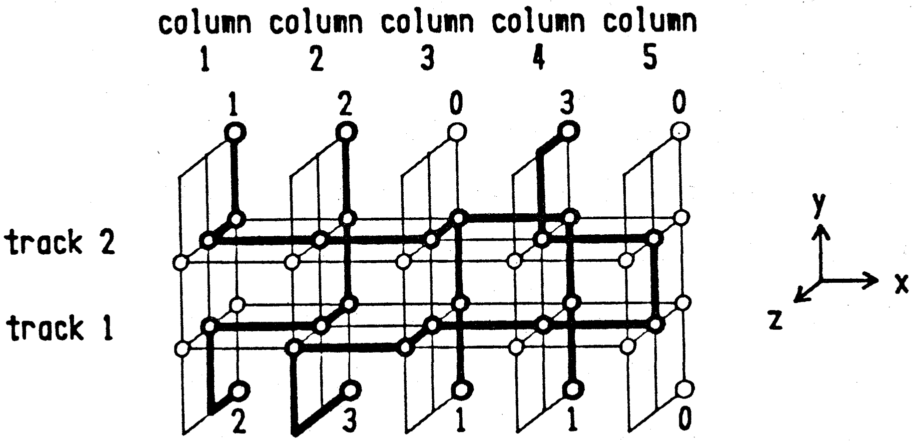

図1 チャネルとチャネル配線

グラフG_eがネットe の配線を表わす。グラフG_eの道（長さ１以上）で、直線上にあるものを線分という。線分のうちで、真に他の線分の一部分でないものを、セグメントという。頂点v1,v2 を端点とするセグメントを　v1～v2　と書く。x,y,z 軸に平行なセグメントを、それぞれ、水平セグメント、垂直セグメント、スルーホールと呼ぶ。チャネル配線が可能であるためには、明らかに、ds本以上のトラックが必要である。チャネル配線の例を図１（図１の太線）に示す。

３．すべてのネットが２端子ネットであるチャネルに対して

３層チャネル配線に関しては、次のことが知られている。

［命題１］(7) トラック数がdsであり、かつ、すべてのネットが、上側端子１個と下側端子１個からなる２端子ネットであるチャネルは配線可能である。　■

本節では、垂直型３層チャネル配線アルゴリズムCHROUTERを使用することにより、トラック数がdsであり、かつ、すべてのネットが２端子ネットであるチャネルは配線可能であることを示す。

垂直型チャネル配線アルゴリズムは、左側のコラムより順に、コラムごとに配線を進めていく。以下、CHROUTERをPASCAL風に記述する。２．３節で述べたように、チャネル配線とはV　Eの各要素に対して関数net の値を決定することであるが、簡単のため、ここではVの各要素に対する関数net の値の決定の方法のみを記述する。Eの各要素に対する関数net の値の決定の方法は、これより容易に分かる。CHROUTERにおいては、Vの要素$<c,t,p>$ に対する関数net の値net($<c,t,p>$)は３次元の配列net[c,t,p]で表現されており（以後、net は配列を意味する）、CHROUTERの実行前には、net[c,0,1],net[c,W+1,1]　($1 \leq c \leq L$) は各端子が属するネットを示しており、 net[c,t,p] ($1 \leq c \leq L$, $1 \leq t \leq W$, $1 \leq p \leq Z$) はすべて0 である。なお、本節を通して、W=ds, Z=3である。

［アルゴリズム　CHROUTER］

```
procedure CHROUTER;
var f:array[0..W+1] of 0..N;  q:array[0..W+1] of 0..Z;
    t:0..W+1; c:0..L;
  procedure COLROUTER(c:1..L);
    begin ...... end;
  begin
  for t:=1 to W do  begin f[t]:=0;q[t]:=0;end;
  c:=0;
  repeat
    c:=c+1;
    q[0]:=0;q[W+1]:=0;f[0]:=net[c,0,1];f[W+1]:=net[c,W+1,1];
    COLROUTER(c);
    until (L1≤c)and(f[t]=0 for all t (1≤t≤W));
  end;
```
■

COLROUTER(c)はコラムc の配線を行う。すなわち、$\{\langle c,t,p\rangle \mid 1\leq t\leq W, 1\leq p\leq Z\}$, $\{(\langle c,t,p\rangle, \langle c+1,t,p\rangle) \mid 1\leq t\leq W, 1\leq p\leq Z\}$, $\{(\langle c,t,p\rangle, \langle c,t+1,p\rangle) \mid 0\leq t\leq W, 1\leq p\leq Z\}$, $\{(\langle c,t,p\rangle, \langle c,t,p+1\rangle) \mid 1\leq t\leq W, 1\leq p\leq Z-1\}$の各要素に対して、関数net の値を決定する。一般的に垂直型チャネル配線アルゴリズムはこの形をしており、COLROUTER(c)の実行の直前の時点における配線の状態は以下のようになっている。

コラムc-1 までの配線が完了している。さらに、コラムc-1 からコラムc にどのように配線が渡されるか（すなわち、$\{(\langle c,t,p\rangle, \langle c+1,t,p\rangle) \mid 1\leq t\leq W, 1\leq p\leq Z\}$ の各要素に対する関数net の値）が、配列f[t], q[t] $(0\leq t\leq W+1)$ により次のように表わされている。

1≦t≦W なる各t に対して、

トラックt において、コラムc-1 よりネットe の配線が層p を通り渡される場合 .... f[t]=e, q[t]=p

トラックt において、コラムc-1 より渡される配線がない場合 .... f[t]=0, q[t]=0

f[0]=net[c, 0, 1], q[0]=0

f[W+1]=net[c, W+1, 1], q[W+1]=0

1≦e≦Nなる各e に対して、nt(e)=|{t|0≦t≦W+1, f[t]=e}|と定義する。

CHROUTERは、水平方向の配線はできるだけ層2 に行い、垂直方向の配線は層1 および層3 に行う。CHROUTERによる各ネットの配線パターンは、 Z軸方向に透視した場合、図２に示す８個のいずれかである。（文献(7) のアルゴリズムの配線パターンはこれらに修正を加えたものも含む。）図３にCHROUTERによる配線の例を示す。各コラムの垂直セグメントのうちで、それから左隣のコラムにのみ配線が延びている（スルーホールを一個介してもよい）ものを l垂直セグメント、同様に、右隣のコラムにのみ配線が延びているものを r垂直セグメントと呼ぶ。 r垂直セグメントのうちで、一方の端子が下側端

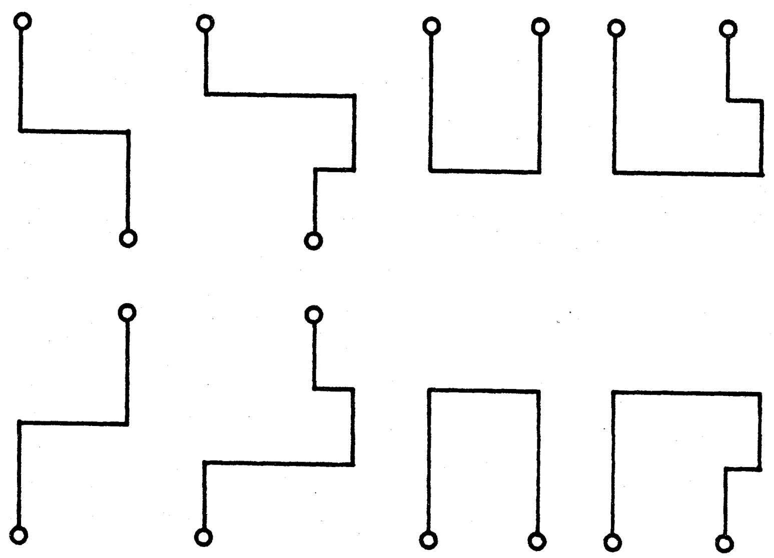

図２　CHROUTERの配線パターン

子であるものをrd垂直セグメント、上側端子であるものをru垂直セグメントと呼ぶ。

COLROUTER を記述する前に、次の性質１が成立することを述べておく。

［性質１］ COLROUTER(c)の実行の直前の時点において、以下が成立する。

① 各ネットe に対してnt(e)⩽2 である。整数列0,1,...,ds+1の連続した部分列h,h+1,...,i(h<i)において、f[h]=f[i]≠0 である場合、この部分列は V区間であるといい、[h,i]と書く。 共通部分を持たない２個の V区間は互いに素であるという。

② 各ネットe に対して、nt(e)=1 ならば coll(e)⩽c<colr(e) であり、逆も成立する。また、nt(e)=2 ならば colr(e)⩽c である。

③ コラムc-1 の垂直セグメントは、l垂直セグメント、rd垂直セグメント、ru垂直セグメントのいずれかである。rd垂直セグメント、ru垂直セグメントの端子でない方の端点があるトラックを、それぞれ、rdトラック、ruトラックという。２個以上の l垂直セグメントが存在するならば、それらはすべて同一の層（層1 か層3 ）にある。同様に、２個の r垂直セグメントが存在するならば、それらは同一の層（ l垂直セグメントと異なる層で、層1 か層3 ）にある。

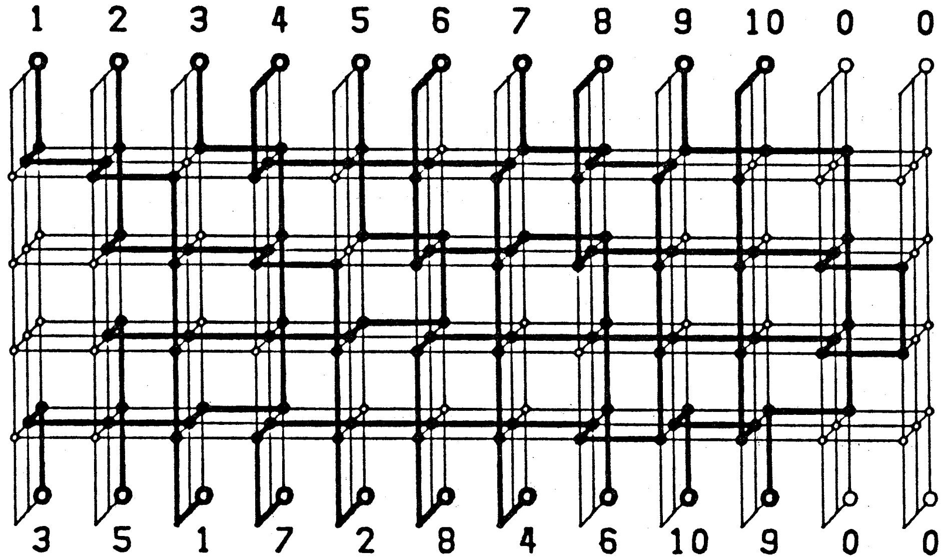

図３ CHROUTERの配線例

④ $|\{t|1 \leqq t \leqq ds, q[t]=1$ か3 $\}| \leqq 1$である。q[t]=1か3 であるトラックを特異トラックという。 tが特異トラックである場合、 頂点<c-1, t, q[t]>はコラムc-1 の r垂直セグメントの端点である。

⑤ <c-1, r, p>～<c-1, s, p>(r<s) をコラムc-1 の任意の r垂直セグメントとする。$1 \leqq e \leqq N$なる各e に対して、$|\{t|1 \leqq t \leqq ds, r \leqq t \leqq s, f[t]=e\}| \leqq 1$ である。 ■

[手続き COLROUTER]

```
procedure COLROUTER(c:1..L);
var V:set of V区間;   r1, s1, r2, s2, ...:0..ds+1;
    pv:1..3;  ts:0..ds;   t :0..ds+1;
  procedure SINGULAR;
   | begin
   | if (特異トラックがある)
   |     then ts:= 特異トラック  else ts:=0;
   | end;
  procedure VINTERVAL;
   | begin;
   | V:= φ;
   | while (Vのいずれの要素とも互いに素である V区間がある) do
   |     V:=V∪{ その V区間 };
   | V≠φのとき、V={[r1, s1], [r2, s2], ..., [rk, sk]} (r1<s1<r2<s2<...<rk<sk) である
   |            とする。;
   | end;
  procedure LAYER;
  var t:1..ds;
   | begin
   | if (V≠φ) then
```

```
    begin
    if (ts≒0) then
      begin
      if (r_i<ts<s_i となるi がある) then
        pv:=4-q[ts]        ...................................... ⓐ
      else  pv:=q[ts];     ...................................... ⓑ
      end
    else if (r_1=0) then pv:=3 (* 1でもよい *)
    else if (net[c-1,r_1,1]=0かf[r_1])  then pv:=1   ............... ⓒ
    else  pv:=3;   ......................................... ⓓ
    end
  else  if (ts≒0) then pv:=q[ts]   ............................. ⓔ
  else  pv:=3;(* 1でもよい *)
  end;
procedure CHANGE1(t:1..ds);
  begin
  if (net[c-1,t,pv]=0 かf[t]) then
    begin
    if (net[c-1,t,pv]=0)  then  net[c-1,t,pv]:=f[t]
       else  net[c-1,t,2]:=0;
    q[t]:=pv;
    net[c,t,2]:=0;  net[c,t,pv]:=f[t];
    end
  end;
procedure LEFT;
var r,s:0..ds+1;
```

```
  begin
  for each [r,s] in V do
    begin
    for t:=r to s do  net[c,t,pv]:=f[r];
    f[r]:=0;  q[r]:=0;
    f[s]:=0;  q[s]:=0;
    end;
  end;
procedure RIGHT;
var t,t1:1..ds;
  begin
  if (f[0]≠0) then
    begin
    t1:=min{t|(1≤t≤ds)and(f[t]=0)};
    for t:=1 to t1 do net[c,t,4-pv]:=f[0];
    f[t1]:=f[0];  q[t1]:=4-pv;
    end;
  if (f[ds+1]≠0) then
    begin
    t1:=max{t|(1≤t≤ds)and(f[t]=0)};
    for t:=t1 to ds do net[c,t,4-pv]:=f[ds+1];
    f[t1]:=f[ds+1]; q[t1]:=4-pv;
    end;
  end;
```

```
procedure CHANGE2;
var t:1..ds;
 begin
 for t:=1 to ds do
   if (f[t]≠0)and(q[t]≠2)and(net[c,t,2]=0) then
     begin
     net[c,t,2]:=f[t];
     q[t]:=2;
     end;
 end;


begin (* COLROUTER *)
for t:=1 to ds do
  if (f[t]≠0) then  net[c,t,q[t]]:=f[t];    .....................ⓕ
SINGULAR;
VINTERVAL;
LAYER;
if (V≠φ)and(q[r1]=2) then CHANGE1(r1);
if (V≠φ)and(q[sk]=2) then CHANGE1(sk);
LEFT;
RIGHT;
CHANGE2;
end;                                                          ■
```

以下、性質１が成立した状態で COLROUTER(c) の実行が開始されたとし、実行される順に手続きを説明してゆく。

まず、ⓕではコラムc-1 より渡された配線を、コラムc に受取る。次に、SINGULARにより、特異トラックがある場合、そのトラックの番号が変数tsに与えられる。次のVINTERVAL では、互いに素である V区間の集合で、極大である（その集合のすべての要素と互いに素である V区間がない）ものを求め、それを$V=\{[r_1,s_1],[r_2,s_2],...,[r_k,s_k]\}$（ $r_1<s_1<r_2<s_2<...<r_k<s_k$）とする。次に、LAYER により、変数pvに値1 か3 が与えられる。後に、LEFTにより、コラムc の l垂直セグメント$<c,r_i,pv>\sim<c,s_i,pv>(i=1,2,...,k)$が配線され、RIGHT により、コラムc の r垂直セグメントが層(4-pv)に配線される。LAYER の目的のひとつは、ts≠0である場合、これらの垂直セグメントが<c,ts,q[ts]>を通らないようにpvの値を決定することである。ⓐ,ⓑ,ⓔ は、この意味において、容易に理解することができる。ⓒ,ⓓ は、後に述べる補題２が成立するようにするためのものである。

次に、V≠φであり、かつ、トラックr_1においてコラムc-1 より渡された配線が層2を通っている場合、CHANGE1(r_1) により、可能ならば、これを層pvを通るように変更する。また、トラックs_kに対して、同様な操作をCHANGE1(s_k) により行う。この時点において、次の補題２が成立する。

［補題２］　V≠φ, r_1≠0 かつs_k≠ds+1 であるならば、トラックr_1, s_k において、コラムc-1 より渡される配線のうち少なくとも一方は、層pvを通る。

（証明）まず、ts=0である場合を考える。この場合、pvの値はⓒ,ⓓ において決められる。これは、トラックr_1において渡された配線を、CHANGE1(r_1) により層pvに変更できるように、pvの値を決定することに他ならない。従って、補題は明らかである。

次に、ts≠0である場合を考える。トラックtsがrdトラックであるとする（ruトラックである場合も同様に証明できる）。このとき、性質１の⑤より、$ts<s_1$ である。$r_1<ts<s_1$である場合、性質１の④より$<c-1,r_1,q[ts]>$を垂直セグメントが通っているので、$<c-1,r_1,pv(=4-q[ts])>$ を通る垂直セグメントはない。従って、$net[c-1,r_1,pv]=0$ か

$f[r_1]$ であり、CHANGE1(r_1) により、トラックr_1により渡される配線は層pvを通るように変更される。従って、補題が成立する。 $r_1=ts$ である場合、明らかに補題は成立する。$ts<r_1$ である場合、性質１の⑤より、$<c-1, r_1, pv(=q[ts])>$ を通るru垂直セグメントはない。また、性質１の③より、これを通る l垂直セグメントもない。従って、$r_1<ts<s_1$の場合と同様に補題が成立する。 ■

図４にCOLROUTER(c)の配線の説明図を示す。(a) は、$V \neq \phi$、ts=0である場合である。(b),(c),(d) は、$V \neq \phi$、$ts \neq 0$、かつ、トラックtsがrdトラックである場合であり、それぞれ、$r_1<ts<s_1$、$r_1=ts$、$ts<r_1$ である場合である。

以下、LEFT,RIGHT,CHANGE2の説明を行う。

LEFTは、$V \neq \phi$である場合、コラムc の l垂直セグメント$<c, r_i, pv>$～$<c, s_i, pv>$ (i=1,2,...,k)の配線を行う。各i に対して、性質１の②より$colr(f[r_i]) \leq c$ であり、ネット$f[r_i]$ はコラムc で配線が終わる。 RIGHT は、LEFT終了の時点において$f[0] \neq 0$で

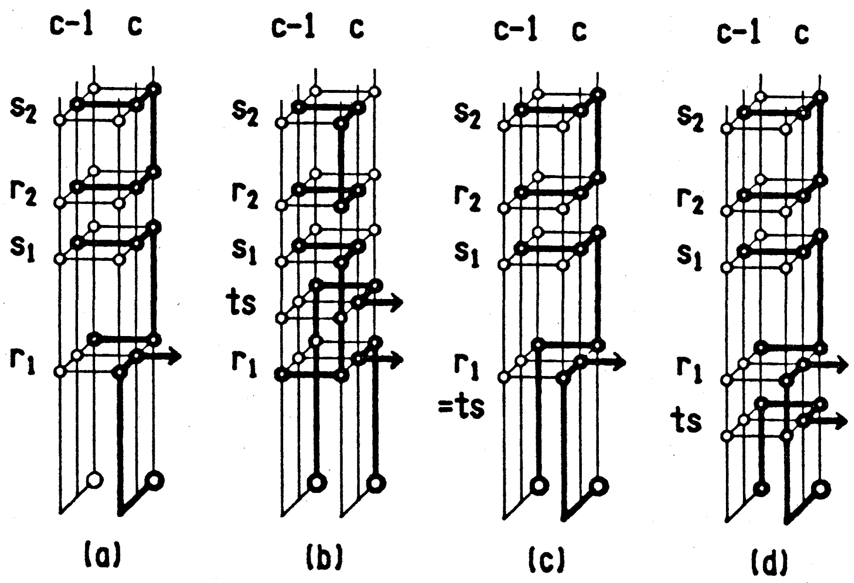

図４ COLROUTER(c)の説明図

ある場合、コラムc のrd垂直セグメントを、また、f[ds+1]≠0 である場合、コラムc のru垂直セグメントを、それぞれ、層(4-pv)に配線する。いま、f[0]≠0であるとする。V≠φである場合、$f[r_1]=0$ であるので、rd垂直セグメントは必ず配線できる。また、V=φである場合、stac(c) は(r,r) か(r,n) であり、補題1より、d(c)≦ds である。従って、性質1の②より、rd垂直セグメントは必ず配線できる。同様に、f[ds+1]≠0 であるならば、ru垂直セグメントが必ず配線できる。また、Vが極大であることより、これらの r垂直セグメントに対して、再び、性質1の⑤が成立する。 RIGHT 終了の時点において、q[t]=1か3 である（すなわち、コラムc+1 に層1 か層3 で渡されるようになっている）トラックは、RIGHT により配線された r垂直セグメントの、端子でない方の端点があるトラックか、トラックtsのいずれかである。CHANGE2 により、可能であるならば、これらを層2 で渡されるように変更する。 変更できないトラックが残るのは、前述の r垂直セグメントの端点があるトラックがr_1かs_kである場合であり、補題2より、高々1個である。

以上の議論より、COLROUTER(c)の実行の直前の時点において性質1が成立していれば、COLROUTER(c)は必ず実行することができ、さらに、COLROUTER(c+1)の実行の直前の時点において、再び、性質1が成立する。従って、次の定理が成立する。

［定理2］ W=ds,Z=3であり、すべてのネットが2端子ネットであるチャネルはアルゴリズムCHROUTERで配線できる。 ■

以上、チャネル配線はV∪Eの各要素にネットの番号を割り付けることであるとしてきたが、実際には、各セグメントに対してその両端点の座標を決めてやればよい。このようにした場合の、本章で述べたアルゴリズムの時間的複雑さについて考える。

コラム1 からコラムL1 の間には0端子コラムはないと仮定する。（コラム1 からコラムL1 の間においては、0端子コラムでないコラムに対してのみCOLROUTER を適用すると考えることと同じ。） すべてのネットは2端子ネットであるので、L1≦2×Nである。従ってCOLROUTER が適用されるコラムの個数は高々2×N＋N／2である。各コラムにおいてCOLROUTER を適用するのに要する時間の内、 l垂直セグメントと r垂直セ

グメントの配線に関する時間は各 l垂直セグメントと r垂直セグメントに負わせ、その他の時間を各コラムに負わせることにする。各コラムに負わせられる時間は定数で押えられ、従って、コラムに負わせられる時間の総数はO（N）である。 V区間の管理および空きトラックの管理に平衡2-3 木を使用し、注意深くアルゴリズムを作ることにより、各 l垂直セグメントと r垂直セグメントに負わせられる時間はO（$\log_2 N$）にすることができる。 l垂直セグメントと r垂直セグメントの総数は、図２より高々３×Nであり、従って、 l垂直セグメントと r垂直セグメントに負わせられる時間の総数は O（N・$\log_2 N$）である。従って、配線に要する時間はO（N・$\log_2 N$）である。

５．一般的なチャネルに対して

前章ではすべてのネットが２端子ネットであるチャネルに対してCHROUTERを適用したが、CHROUTERは本質的には３個以上の端子からなるネットが存在するチャネルに対しても適用できる。そのためには、CHROUTERの記述の若干の変更を要する。３個以上の端子から成るネットが存在する場合、２端子ネットしか存在しない場合と比較して大きく異なるのは次の点である。

① 性質１の①において、$nt(e) \geq 3$ であるネットe が存在する可能性がある。

② 性質１の②において、$nt(e) \geq 2$ であっても $c < colr(e)$である可能性がある。

ネットe に対して$f[i_1]=f[i_2]=\ldots=f[i_{nt(e)}]=e$, $i_1<i_2<\ldots<i_{nt(e)}$である場合、部分列 $i_1, i_2, \ldots, i_{nt(e)}$ のみを V区間（これをネットe の作る V区間と呼ぶ）と呼ぶことにする。ネットe の作る V区間 vに対して、

$$pr(v)=\begin{cases} nt(e) & \ldots\ldots \quad colr(e) \leq c \text{ である場合} \\ nt(e)-1 & \ldots\ldots \quad c < colr(e) \text{ である場合} \end{cases}$$

と定義する。また、 V区間の集合Vに対して、

$$pr(V)=\sum_{v \in V} pr(v) \text{ と定義する。}$$

$pr(v) \geq 2$ である V区間 vを強 V区間、$pr(v)=1$ である V区間 vを弱 V区間とそれぞれ呼

ぶ。強 V区間が存在する場合、手続きVINTERVAL によって作られる V区間の集合Vの要素が1個ならばそれは強 V区間であるようにVを作るようにする。

手続きVINTERVAL で選ばれた V区間の集合Vの中に、$c<colr(e)$ であるネットe の作る V区間が含まれている場合、次に示すように手続きLEFTにおいて、ネットe の配線をコラムc+1 に渡さなければならない。$f[i_1]=f[i_2]=\ldots=f[i_{nt(e)}]=e,\ i_1<i_2<\ldots<i_{nt(e)}$であると仮定する。

- $nt(e)\geqq 3$ の場合 ... トラック$i_2, i_3, \ldots, i_{nt(e)-1}$ のいずれかにおいて層2 を通りコラムc+1 に渡す。
- $nt(e)=2$ かつ$f[j]=0$である $j(i_1<j<i_{nt(e)})$が存在する場合 ... トラックj において層2 を通りコラムc+1 に渡す。
- その他の場合 ... トラックi_1, i_2 のいずれかにおいて層2 を通りコラムc+1 に渡す。

このように変更されたCHROUTERを使用することにより、次の定理を示すことができる。

[定理2] W＝2ds-1, Z＝3 である任意のチャネルは配線可能である。

(証明) 問題となるのは、COLROUTER(c)の手続きRIGHT においてt1の存在が保証されるかということである。次の①、②、③、④の場合には必ず存在する。

- ① COLROUTER(c)の実行の直前の時点において$f[i]=0$ であるトラック$i(1\leqq i\leqq W)$が存在する場合 (図5(a))
- ② 手続きVINTERVAL によって選ばれた V区間の集合Vが、 $pr(V)\geqq 2$ である場合 (図5(b))
- ③ $stac(c)=(r,l)$ か(l,r) である場合 (図5(c))
- ④ $stac(c)=(n,b),(n,l),(b,n)$ か(l,n) である場合 (図5(d))

次に①、②、③、④のいずれでもない場合を考える。③でないことと補題1より、$d(c)\leqq ds$ である。②でないこととprの定義より、各ネットe に対して$nt(e)\leqq 2$ であり、さらに$colr(e)<c$ ならば$nt(e)=0$ である。故に、$ntsum=\sum_e nt(e)$ とすると、$ntsum\leqq 2d(c)$

である。c が２端子コラムであるとすると、①でないことより2ds-1+2=ntsum であり、2ds+1=ntsum≤2d(c)≤2ds となり矛盾が生じる。また、c が１端子コラムであるとすると④でないことより、ntsum≤2(d(c)-1)+1 であり、2ds-1+1=ntsum≤2d(c)-1≤2ds-1 となり矛盾が生じる。従って cは０端子コラムであり手続きRIGHT は明らかに実行できる。■

［系１］ W＝2(2ds-1)-1 , Z＝2 である任意のチャネルは配線可能である。

証明略 ■

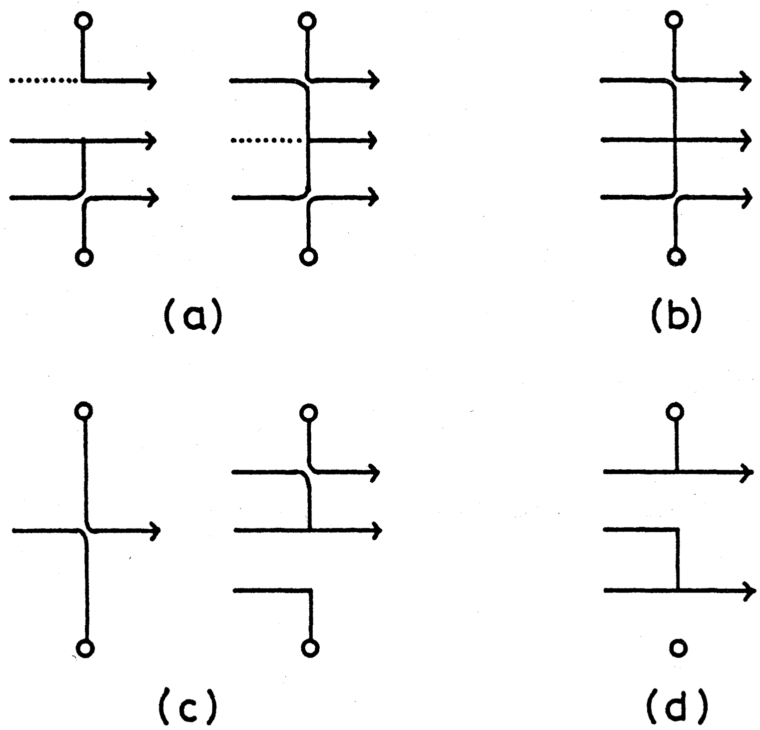

図５　３端子以上のネットが存在する場合の配線

6. むすび

3層チャネル配線問題に対して、すべてのネットが2端子ネットである任意のチャネルを、チャネル密度に等しい本数のトラックで配線する垂直型3層チャネル配線アルゴリズムを示した。このアルゴリズムはO（N・$\log_2 N$）の時間で配線を行う。これは従来知られているもの(7)と比較して速く、また考え方も単純であり、さらに、3端子以上のネットがあるようなチャネルに対しても適用することができるという長所を持つ。このアルゴリズムを使用することにより、3層チャネル配線問題においては、任意のチャネルが2×（チャネル密度）－1本のトラックで配線可能であることを示すことができた。またこのことより、2層チャネル配線問題においては、任意のチャネルが4×（チャネル密度）－3本のトラックで配線可能であることを示すことができた。

文献

(1) Hashimoto,A. and Stevens,J. :"Wire routing by optimizing channel assignment within large apertures", Proc. 8th Design Automation Workshop, pp.155-169 (1971)

(2) Johnson,D.S.:"The NP-completeness column : An ongoing guide" , J.Algorithms,Vol.3,No.4, pp.381-395 (1982)

(3) Deutch,D.N. :"A 'dogleg' channel router", Proc. 13th Design Automation Conference, pp.425-433 (1976)

(4) Yoshimura,T. and Kuh,E.:"Efficient algorithms for channel routing", IEEE Trans. Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, Vol.CAD-1,No.1,pp.25-35 (1982)

(5) 梶谷、石井、下山、金田 :" 2セル列2層最小間隔配線アルゴリズム", 信学技法 CAS 79-142 (1980)

(6) Rivest,R.L. and Fiduccia,C.M.:"A 'greedy' channel router", Proc. 19th Design Automation Conference, pp.418-424 (1982)

(7)Preparata,F.P. and Lipski,W.,Jr. :"Optimal three layer channel routing", IEEE Trans. Computer,Vol.C-33 ,No.5 ,pp.427-423(1984)

(8) Rivest,R.L. , Baratz,A. and Miller,G.:"Provably good channel routing algorithms",in Proc. 1981 Carnegie-Mellon Conf. on VLSI (1981)